Обичне диф. ј-не

Многи закони по којима се одвијају ове или оне појаве записују се у форми диф. ј-на.

Деф: Диф. ј-на је ј-на у којој се непозната ф-ја налази под знаком извода.

Основни задатак диф. ј-на је изучавање ф-ја које су решења датих ј-на.

Обична диф. ј-на је ј-на у којима је непозната ф-ја - ф-ја једне променљиве.

Диф. ј-не првог реда

Деф:

Ј-на облика: $F(x,y,y')=0$

где је x нез. пром, y промењена ф-ја, y' њен извод, назива се диф-ом ј-ном I реда.

$$y'=f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad f(x,y)dx-dy=0$$

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

где су $P(x,y)$, $Q(x,y)$ познате ф-је. Променљиве су равноправне. Сваку од њих можемо посматрати као ф-ју друге.

Деф:

Решењем диф. јне I реда наз. се ф-ја $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$, које кад се замени у дин претвара је у идентитет.

График решења диф. јне назива се интегралном кривом.

Т. Кошије даје одговор на питање о том под којим условима ~~под којим~~ јна има решење. То је Т. о постојању и јединствености решења диф. јне. То је осн. Т. теорије диф. јна.

T. (Т. Кошије) Ако ф-ја $f(x,y)$ и њен извод $f'_y(x,y)$ су дефинисани и непрекидни у некој области G равни Oxy, то у било којој тач. (x_0,y_0) области G, у некој околини постоји јединствено решење јне $y'=f(x,y)$ које задовољава услове:

$$y=y_0,\ \text{за}\ x=x_0.$$

Геом. Т. тврди да кроз сваку унутр. т. (x_0,y_0) области G пролази јединств. интегр. криве. Иначе, у области G диф. јна има беск. број различитих решења.

Услови под којима ф-ја $y=\varphi(x)$ добија задату вредност y_0 у зад. т. x_0 називају се почетним условима, ~~~~ пишемо $y|_{x=x_0}=y_0$.

Задатак Кошија је наћи решење које задово-
-љава поч. услове. Теор. то значи:
из свих интегр. кривих издвојити ону
која пролази кроз задату тачку (x_0, y_0) равни
Oxy.

Деф: Опште реш. јне у некој области G
равни Oxy наз. се фја:

$$y = \varphi(x, C)$$

која зав. од x и произв. конст. C
која је решење дифјне, за било коју
вредност конст. C.

Ако за поч. усл. за које је $(x_0, y_0) \in G$
$\exists$ јед. вредн. $C = C_0$, тако да $y = \varphi(x, C_0)$
задовољ. поч. усл. $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Деф: Партик. реш. ен. јне у обл. G
наз. се фја $y = \varphi(x, C_0)$ која се доб. из
општег реш. $y = \varphi(x, C)$ при одређ. вредн.
конст. $C = C_0$.

Теор. опште реш. $y = \varphi(x, C)$ предст. фамилију
интегр. кривих у р. Oxy, које зависе од
произв. конст. C, а парт. реш. $y = \varphi(x, C_0)$
једну интегр. криву те фамилије
која пролази кроз тачку (x_0, y_0).

Диф. j-не код којих се променљиве могу раздвојити

То је j-на облика

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Где су $f_1(x)$ и $f_2(y)$ непрекидне ф-је.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x)\,dx + C_2$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C,$$ где је $C = C_2 -$ произв. кон

Хомогене диф. j-не

То је j-на облика

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Уводи се смена: $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$

t - нова непрекидна ф-ја $t = t(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t) \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = f(t) - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \boxed{\int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + C}$$

Линеарна јна

То је јна облика

$$y' + p(x)y = h(x).$$

где су $p(x)$, $h(x)$ непр. фје.

Ако је $h(x) \equiv 0$, хом. јна

$h(x) \not\equiv 0$ нехом. јна.

За налажење општег реш. примењује се метод варијације константе.

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

где је $C = \pm C_1$.

Претпост. $C = C(x)$, тј.

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x) \cdot C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} \cancel{- p(x) \cdot C(x)e^{-\int p(x)dx}} \cancel{+ p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} \equiv h(x)$$

$$C'(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int h(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int h(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Бернулијева ј-на

То је ј-на облика:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

$m \neq 1 \in R$.

$$\frac{y'}{y^m} + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

Смена:

$$u = y^{1-m}$$

$$u' = (1-m)y^{-m} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{y^m}{1-m} \cdot u'$$

$$\frac{u'}{1-m} = \frac{y'}{y^m}$$

$$\frac{u'}{1-m} + p(x) \cdot u = q(x)$$ линеарна ј-на